제26회 생글논술경시대회

고3 자연 유형

유의사항

1. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 도는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용함.
2. 답안이나 답안지의 여백에 답안 이외에 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현, 표시를 한 경우 0점 처리함.
3. 1인당 1장의 답안지에 답안을 작성할 것.

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.

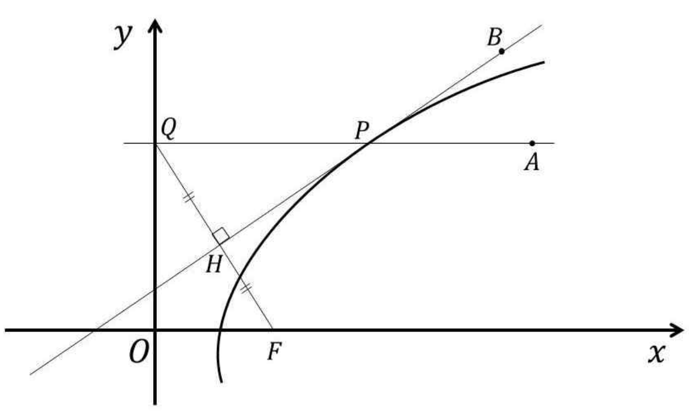
(가) 이차곡선의 정의는 다음과 같다.

포물선 : 한 정점과 한 정직선으로부터 이르는 거리가 같은 점의 자취
타원 : 두 정점으로부터 이르는 거리의 합이 일정한 점의 자취
쌍곡선 : 두 정점으로부터 이르는 거리의 차가 일정한 점의 자취

위의 정의에 의해 구해지는 이차곡선은 모두 원뿔로부터 얻어질 수 있는데 아래 그림과 같이 원뿔에 평면을 다양한 각도로 통과시켰을 때 나타나는 곡선이란 의미에서 이차곡선을 원뿔곡선이라고도 부른다. 단면이 이등변삼각형인 원뿔을 직원뿔이라고 하는데 이 직원뿔을 여러 가지 평면으로 잘았을 때 평면이 밑면과 이루는 각이 원뿔의 모선과 밑면과 이루는 각보다 작으면 타원, 같으면 포물선, 크면 쌍곡선이 얻어진다.

(나) 이차곡선은 여러 가지 중요한 성질을 가지고 있는데 그 중 초점과 관련된 성질이 자주 다루어진다. 예를 들어 빛의 진행 경로에 관한 기본 원리 중에는 빛이 입사각과 반사각이 같게 진행하는 '반사의 법칙'의 원리가 있다. 이차곡선의 초점에 이 원리를 적용시키면 이차곡선을 다양한 용도로 활용할 수 있다.

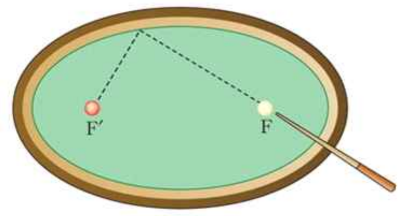
(다) 그림 1 과 같이 x, y축 위에 각각 점 F와 점 Q를 잡는다. 선분 QF의 수직이등분선과 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선의 교점을 P라고 하자. 선분 QP의 연장선 위의 임의의 점을 A라 하고 수직이등분선 PH의 연장선 위의 임의의 점을 B라 하자.



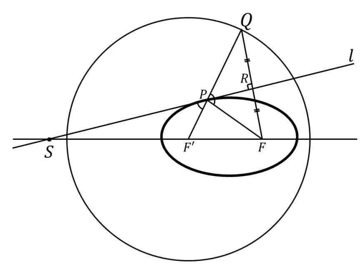
<그림 1>

<계속>

(라) 그림 2와 같이 타원당구대는 한 초점 위에 놓여진 공을 임의의 방향으로 치더라도 반드시 다른 한 초점을 지나게 된다는 성질이 있다. 이는 그림 3 의 방법에 의해 증명할 수 있다. 두 정점 F, F'가 주어져 있을 때 점 F'를 중심으로 하는 원을 그린다. 원 위의 임의의 점을 Q라 하고 선분 QF의 수직이등분선을 l이라 하면 l과 선분 QF'의 교점 P는 타원을 그리게 된다. 이 때 선분 QF와 수직이등분선 l의 교점을 R이라 하면 $\angle F'PS = \angle QPR$ (맞꼭지각), $\angle QPR = \angle FPR$이므로 $\angle F'PS = \angle FPR$이 성립하므로 타원당구대 위의 한 초점에 놓인 공은 반드시 다른 초점을 지나게 된다.

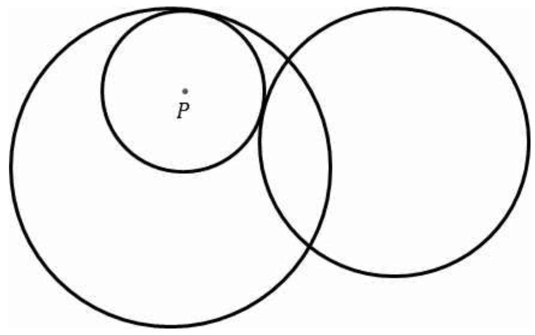


<그림 2>

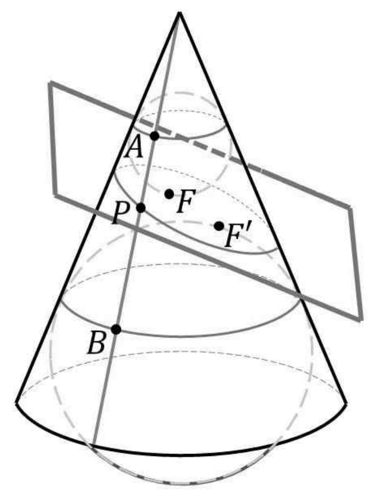


<그림 3>

(1) 다음과 같이 두 점에서 만나는 두 원이 있을 때, 하나에는 외접하고 다른 하나에는 내접하는 원의 중심 P는 어떠한 자취를 나타내는지 논리적으로 설명하시오.

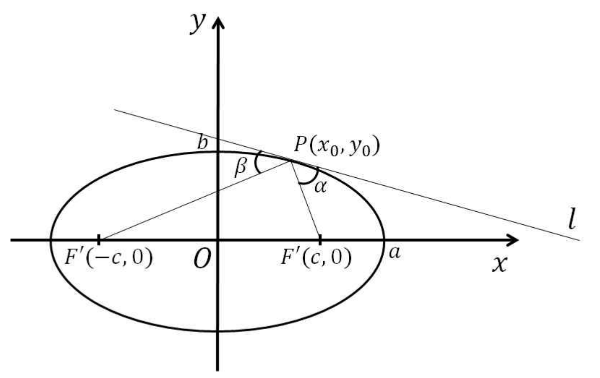


(2) 다음과 같이 직원뿔에 비스듬하게 자른 평면을 경계면으로 하여 원뿔과 경계면에 접하는 두 개의 구가 위 아래로 존재하게 된다. 원뿔과 경계면의 교점으로 이루어진 곡선 위의 임의의 점을 P라 하고 구와 경계면의 접점을 각각 F와 F'라 할 때 경계면에 생기는 곡선은 어떠한 자취를 그리게 되는지 논리적으로 설명하시오.



(3) 그림 1에서 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$라 하고 F 와 Q 의 좌표를 각각 $F(p, 0)$, $Q(0, y)$라 할 때 점 P 의 자취의 방정식을 구하시오. 또 점 P 에서 곡선(점 P 의 자취)에 그은 접선이 수직이등분선 PH 와 일치함을 보이시오.

(4) 다음 그림과 같이 초점이 각각 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 이 주어져 있을 때, 타원 위의 임의의 점 $P(x_0, y_0)$에서 타원에 그은 접선을 l이라 하자. 선분 PF, PF'와 접선 l이 이루는 각을 각각 α, β라 할 때 $\alpha=\beta$ 임을 논리적으로 설명하시오.



[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 함수 $f(x)$가 닫힌구간 [a, b]에서 연속이고, 상수 m, M 에 대해 $m \le f(x) \le M$ 이 성립하면, $m(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ 가 성립한다.

(나) 닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x), g(x)$가 연속일 때,
$f(x) \ge g(x)$이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ 가 성립한다.

(1) n을 2이상의 정수라 할 때, 부등식

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\ln n$$

이 성립함을 보이시오. (단, $\ln x = \log_e x$, $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$)

(2) (1)의 결과를 사용하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$$

이 성립함을 보이시오.

(3) n 이 2 이상의 자연수일 때
$\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$ 임을 이용하여
$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n}x\,dx$ 의 값을 구하시오.

(4) $a_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^n x\,dx$ 이라 놓을 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}=1$ 이 성립함을 설명하시오.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가) 좌표평면 위에서 자취의 방정식 $f(x, y)=0$으로 표현된 도형에 대하여 새로운 도형 $f(px, qy)=0$은 원래의 도형 $f(x, y)=0$을 x축으로 $\dfrac{1}{p}$배, y축으로 $\dfrac{1}{q}$배 한 도형이 된다.
즉 원래의 점(x, y)가 $f(x, y)=0$을 만족하고 새로운 점 (x', y')가 $f(px', qy')=0$를 만족한다면

$$x'=\frac{1}{p}x,\ y'=\frac{1}{q}y$$

일 때 원래의 관계식 $f(x, y)=0$를 만족하게 된다.

(나) 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$에 대하여 x, y가 각각 매개변수 t에 관해

$$x=f(t),\quad y=g(t)$$

와 같이 나타낸 것을 매개변수 방정식이라고 한다.

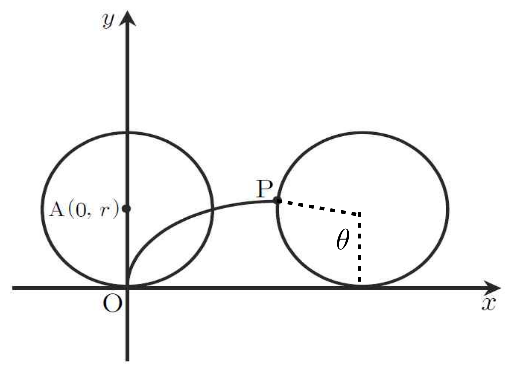
점 $P(x, y)$가 매개변수 방정식 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a \le t \le b)$에 의해 그려지는 곡선의 길이 l은 다음과 같이 주어진다.

$$l=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

(1) 매개변수 방정식 $x=3\sin t$, $y=4\cos t$가 나타내는 도형의 자취의 방정식을 구하고, 임의로 주어진 점 (x, y)에 대해 매개변수 t의 의미를 설명하시오.

(2) x축의 양의 방향과 $\theta\,(0<\theta<\frac{\pi}{2})$의 각을 이루는 동경이 원 $x^2+y^2=b^2$ 과 만나는 교점을 P, 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$과 만나는 교점을 Q 라 할 때, Q 의 좌표를 θ로 나타내시오.

(3) 다음 그림과 같이 평면 위에 중심이 $A(0, r)$이고 반지름이 r인 원이 있다. 이 원이 x축에 접하면서 x축의 양의 방향으로 미끄러지지 않고 굴러갈 때 원 위의 점 P가 그리는 곡선의 자취에 대하여 반지름 AP가 θ만큼 회전하였을 때 점 P의 자취를 θ에 관한 매개방정식으로 표현하시오. 또 $0 \le t \le 2\pi$일 때 점 P의 자취로 이루어진 곡선의 길이를 구하시오. (단, 점 P의 처음 출발 위치는 $(0, 0)$이다.)



(4) 다음 그림과 같이 평면 위에 중심이 원점이고 반지름이 $\dfrac{4}{5}$인 고정된 원 A의 바깥쪽으로 외접해서 구르는 중심이 $(1, 0)$이고 반지름이 $\dfrac{1}{5}$인 원 B 가 있다. A와 B의 중심을 연결한 중심선이 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ라 할 때, 구르는 원 B 위의 한 점 P가 그리는 곡선의 자취에 대하여 점 P의 자취를 θ에 관한 매개변수 방정식으로 표현하고 $0 \le \theta \le 2\pi$ 에서 점 P의 자취로 이루어진 곡선의 길이를 구하시오. 단 점 P의 처음 출발 위치는 $\left(\dfrac{4}{5}, 0\right)$이다. 또 A와 B의 반지름을 각각 a, b라 할 때 점 P의 자취가 그리는 곡선(외접 사이클로이드)이 한 바퀴를 돌아서 원래의 출발 위치로 돌아올 조건에 대해 논술하시오.