제26회
생글논술경시대회
예시답안

고3 자연 유형

한국경제신문이 만드는
생글생글

<고3 자연 유형 예시답안>

[문제 1]

(1) 두 원이 접할 때의 성질을 이용한다. 외접하는 두 원의 반지름을 r_1, r_2라 하고, 두 원의 중심과 중심 사이의 거리(중심거리)를 d 라 하면 $r_1+r_2=d$ 가 성립한다. 또 한 원과 그 원에 내접하는 원의 반지름을 각각 r_1, r_2 $(r_1>r_2)$ 라 하고 중심거리를 d 라 하면 $r_1-r_2=d$ 의 관계가 성립한다. 논제에서 중심이 P 인 원의 반지름을 r 이라 하자. 또, 이 원이 내접하는 원과 외접하는 원의 반지름을 각각 r_1, r_2 라 하고 내접하는 원과 외접하는 원과의 중심거리를 각각 d_1, d_2라 하면 다음 관계가 성립한다.

$$r_1-r=d_1, \quad r_2+r=d_2$$
$$d_1+d_2=r_1+r_2=c \ \ (c\text{는 상수})$$

즉, 두 정점(두 원의 중심)으로부터 이르는 거리의 합이 일정하므로 점 P 의 자취는 타원의 일부를 그리게 된다.

(2) 구의 밖의 한 점에서 구에 그은 접선의 길이는 일정함을 이용한다. 그림에서 경계면 위의 임의의 점 P 에 대하여 원뿔의 꼭짓점에서 점 P를 지나는 모선을 그리고 모선과 경계면 위 아래의 두 구가 접하는 접점을 각각 A와 B라 하면 원뿔의 꼭짓점에서 A, B 까지의 거리가 각각 일정하므로 선분 AB 의 길이는 항상 일정함을 알 수 있다. 또 PF 와 PA, PF'와 PB는 각각 점 P에서 두 구에 그은 접선의 길이로 같으므로 다음의 관계가 성립한다.

$$PF+PF'=PA+PB=AB$$

즉, 두 정점 F, F'로부터 이르는 거리의 합이 일정하므로 경계면 위의 점 P 의 자취는 타원을 그리게 된다.

(3) $\overline{PQ}=\overline{PF}$ 로부터

$$x=\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}$$

가 성립하고, 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 자취의 방정식은

$$y^2=2px-p^2=2p(x-\frac{p}{2})$$

이 된다. 이 식의 양변을 x에 대해 미분하면

$$2yy'=2p$$

이므로

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

이고, $\overline{QF}$ 의 기울기는

$$\frac{y-0}{0-p} = -\frac{y}{p}$$

이므로 수직이등분선 PH 의 기울기는

$$-\frac{1}{-\frac{y}{p}} = \frac{p}{y}$$

이다. 즉, 점 P 에서의 접선의 기울기와 수직이등분선 PH 의 기울기가 일치하므로 수직이등분선 PH 가 곧 점 P 에서의 접선과 일치함을 알 수 있다.

(4) 두 직선이 x축과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면 기울기는 각각 $\tan\theta_1$, $\tan\theta_2$ 이다. 이 때, 두 직선이 이루는 각 중에서 예각을 θ 라 하면 $\theta = |\theta_1 - \theta_2|$이므로

$$\tan\theta = \left| \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} \right|$$

의 관계가 성립한다. 논제의 조건에 주어진 기울기를 이용하여 $\tan\alpha$와 $\tan\beta$를 비교해 보자. 먼저 $\tan\alpha$를 구해보면

$$\tan\alpha = \left| \frac{n-m}{1+nm} \right| = \left| \frac{\frac{y_0}{x_0-c} - \left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)}{1 + \frac{y_0}{x_0-c} \cdot -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}} \right| = \left| \frac{a^2y_0^2 + b^2x_0(x_0-c)}{a^2y_0(x_0-c) - b^2x_0y_0} \right| = \left| \frac{a^2b^2 - b^2x_0c}{c^2x_0y_0 - a^2y_0c} \right|$$

$$= \left| \frac{b^2(a^2 - x_0c)}{y_0c(x_0c - a^2)} \right| = \frac{b^2}{y_0c}$$

가 된다. 계산과정에서 $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ 과 $a^2 - b^2 = c^2$ 임을 이용하였다. 마찬가지로 $\tan\beta$ 를 구하면 $\tan\beta = \frac{b^2}{y_0c}$ 의 결과를 얻을 수 있다. 즉 $\tan\alpha = \tan\beta$ 가 성립하고 α와 β는 예각이므로 $\alpha = \beta$ 임이 증명되었다.

[문제 2]

(1) 임의의 자연수 k에 대해 $k<x<k+1$ 인 x에 대해 $\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$ 이므로 (가)에 의해

$$\frac{1}{k+1}<\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$$

이 성립한다. 먼저 $\displaystyle\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ 에 대해 $k=1,2,3,\ \cdots,n$ 을 차례로 대입하여 더하면

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}$$

으로부터

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}$$

이 성립한다. 이번에는 $\displaystyle\frac{1}{k+1}<\int_{k}^{k+1}\frac{1}{x}dx$ 에 대해 $k=1,2,3,\ \cdots,n-1$ 을 차례로 대입하여 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}<\int_{1}^{n}\frac{1}{x}dx=\ln n$$

가 성립하고 양변에 1을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}<\ln n+1$$

이 성립한다.

(2) (1)의 결과로부터 $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}<\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}}{\ln n}<1+\dfrac{1}{\ln n}$ 이 성립하고

2이상의 자연수 n에 대해 $1<\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$이고, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}}{\ln n}=1$$

이 성립한다.

(3) $\displaystyle\int\sin^{n}x\,dx=\int\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx$에서 $f(x)=\sin^{n-1}x$,
$g'(x)=\sin x$라 놓고 부분적분법을 사용하면

$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1}x \cdot \sin x dx = \sin^{n-1}x \cdot (-\cos x)$
$-\int (n-1)\sin^{n-2}x \cdot \cos^2 x dx$ 이고 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$이므로
$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1}x\cos x - (n-1)(\int \sin^{n-2}x dx - \int \sin^n x dx)$
$\therefore \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$

$a_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}x dx$라 두면 $a_0 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = 1$

$a_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}x dx = \left[-\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2n-1}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n-2}x dx$

$= \frac{2n-1}{2n} \cdot a_{2n-2}$을 얻을 수 있고, 이 과정을 계속하면

$a_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} \cdot a_{2n-4} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4 \cdot 2} \cdot a_0$

$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{\pi}{2}$ 가 된다.

(4) (3)과 같은 방법으로 하면

$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}a_{2n-1} = \cdots = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5 \cdot 3}a_1$이므로

$a_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$, $a_{2n-1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}$이다.

$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x$

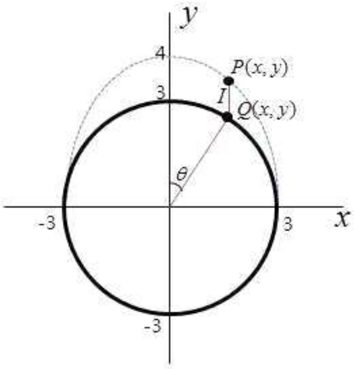
$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1}x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n-1}x dx$가 성립하므로

$a_{2n+1} \le a_{2n} \le a_{2n-1}$로부터 $1 \le \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \le \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1$이다.

[문제 3]

(1) $\sin\theta = \dfrac{x}{3}$, $\cos\theta = \dfrac{y}{4}$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 이므로 구하고자 하는 도형의 자취의 방정식은 타원 $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ 이 된다. 이 도형의 자취의 방정식을 $f(x, y) = 0$이라 할 때 $f(x, y) = 0$을 y축 방향으로 $\dfrac{3}{4}$배 하면 $f(x, \dfrac{4}{3}y) = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 3^2$ 이 된다. 즉, 원점을 중심으로 하고 반지름이 3인 원의 방정식 이 된다. 이 때 타원 위에 임의로 주어진 점을 $P(x, y)$라 하고, y축에 평행하게 직선을 그어 원과 만나는 점을 $Q(x', y')$라 하면 $x' = x$, $y' = \dfrac{3}{4}y$ 의 관계가 성립한다.



이 때 원점과 Q를 이은 선분 $\overline{OQ}$와 y축이 이루는 각을 α라 하면

$$\sin\alpha = \frac{x'}{\overline{OQ}} = \frac{x}{3} = \sin\theta, \quad \cos\alpha = \frac{y'}{\overline{OQ}} = \frac{y'}{3} = \frac{y}{4} = \cos\theta$$

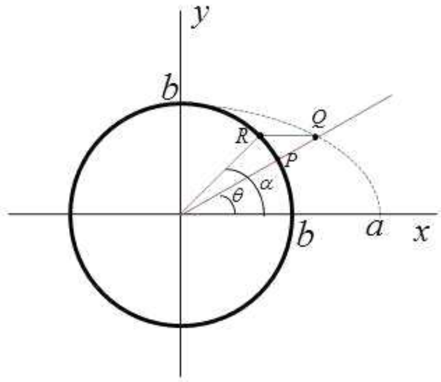
즉 이 때의 α와 주어진 매개변수 θ는 동일한 변수가 된다.

(2) 주어진 원과 타원 위의 점을 각각 $P(x, y)$, $Q(x', y')$라 하면 이 두 점은 동일한 동경 위에 있으므로 기울기가 동일하다. 즉 $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y'}{x'}$ 의 관계가 성립한다.

한편, 원의 방정식을 $f(x, y) = 0$이라 하면 $f(x, y) = 0$을 x축 방향으로 $\dfrac{a}{b}$배 하면

$$f(\frac{b}{a}x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

의 관계가 성립한다.



즉 주어진 원 $x^2 + y^2 = b^2$ 을 x축 방향으로 $\dfrac{a}{b}$배 하면 타원의 방정식 이 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$이 된다. 이 때 타원 위의 점 Q에서 x축과 나란한 선분을 그어 원과 만나는 점을 $R(x'', y'')$라 하고 동경 $\overrightarrow{OR}$ 과 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라 하면

$$x'' = b\cos\alpha, \quad y'' = b\sin\alpha$$

이 되고, 위에서 설명한 원과 타원의 관계에 의해 $x'' \times \dfrac{a}{b} = x'$, $y'' = y'$ 이므로

$$x' = a\cos\alpha,\ \ y' = b\sin\alpha\ ,\quad \frac{y'}{x'} = \tan\theta \qquad \Rightarrow \quad \frac{b}{a}\tan\alpha = \tan\theta$$

의 관계가 성립한다. $\frac{b}{a}\tan\alpha = \tan\theta$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$$\sec^2\alpha = 1 + \frac{a^2}{b^2}\tan^2\theta \ \Rightarrow\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2\tan^2\theta}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{a\tan\theta}{\sqrt{b^2 + a^2\tan^2\theta}}$$

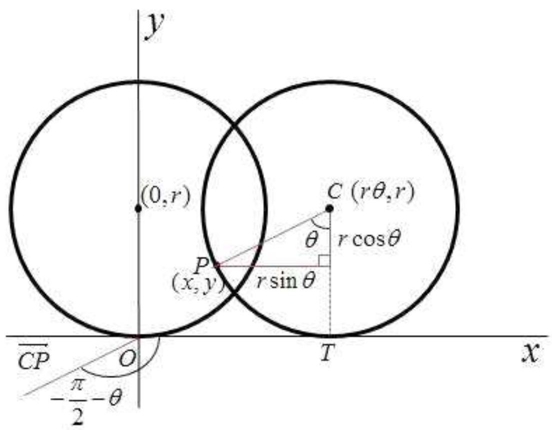
이 된다. 따라서 구하는 점 Q의 좌표는

$$Q(x',\, y') = (a\cos\alpha,\, b\sin\alpha) = \left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+a^2\tan^2\theta}},\ \frac{ab\tan\theta}{\sqrt{b^2+a^2\tan^2\theta}}\right)$$

가 된다.

(별해) 동경의 직선의 방정식을 $y = (\tan\theta)x$라 놓고 타원의 방정식 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 직접 연립하여 교점을 구해도 된다.

(3) θ만큼 회전하였을 때 원의 중심을 C 라 하고 이때의 원과 x축이 접하는 점을 T 라 하면 $\overline{OT}$와 부채꼴의 호의 PT 의 길이가 같으므로 원의 중심 C 의 좌표는 $C(r\theta,\, r)$이 된다. 점 P의 좌표는 벡터 $\overrightarrow{OP}$ 의 성분과 같고 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$ 에 의해 성분을 구할 수 있다.



동경 $\overrightarrow{CP}$ 와 x축의 양의 방향이 이루는 각은 $-\frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로 각각의 벡터의 성분은

$$\overrightarrow{CP} = \left(r\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ r\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = (-r\sin\theta,\ -r\cos\theta)$$

$$\overrightarrow{OC} = (r\theta,\, r)$$

와 같다. 따라서 $\overrightarrow{OP} = (r\theta - r\sin\theta,\ r - r\cos\theta)$이므로 점 P 의 좌표를 $P(x,\, y)$라 하면 구하는 매개변수 방정식은

$$x = r\theta - r\sin\theta\,,\quad y = r - r\cos\theta$$

이다. 또 $0 \le \theta \le 2\pi$ 일 때 곡선의 길이를 l이라 하면 l은 제시문 (나)에서와 같이

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

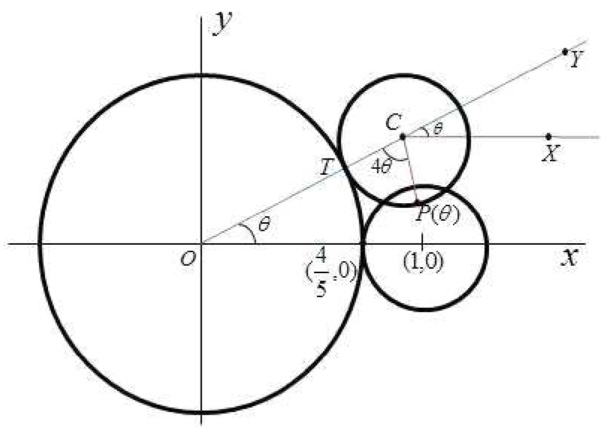
에 의해 구할 수 있다. 이 때 $\frac{dx}{d\theta}=r-r\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=r\sin\theta$ 이므로 대입하여 정리하면

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{2r^2(1-\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{2r^2 2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2r\sin\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[-4r\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=4r-(-4r)=8r$$

따라서 구하는 자취의 길이는 $8r$이다.

(4) 중심선과 x축의 양의 방향이 이루는 각도가 θ일 때의 점 P를 $P(\theta)$라 하고 두 원의 접점을 T, 처음 출발 위치를 P_0 라 하면 큰 원 A와 바깥쪽의 구르는 원 B가 맞물리는 각각의 부채꼴의 호의 길이 P_0T와 $P(\theta)T$가 같으므로 $\frac{4}{5}\theta=\frac{1}{5}\theta'$ 가 성립한다. 즉 $P(\theta)$가 구르는 원 B의 중심에 대해 회전한 각을 θ'라 하면 $\theta'=4\theta$ 이므로 중심선이 회전한 각보다 4배 더 회전하게 됨을 알 수 있다. 따라서 C 에서 x축의 양의 방향과 나란하게 반직선 $\overrightarrow{CX}$를 긋고, 동경 $\overrightarrow{OC}$ 위의 원 바깥의 임의의 한 점을 Y라 하면



$$\theta'=\angle P(\theta)CT=4\theta,\ \angle XCY=\theta$$

이므로 다음의 관계가 성립한다.

$$\angle XCP(\theta)+\angle P(\theta)CT+\angle XCY=\pi\ \Rightarrow\ \angle XCP(\theta)=\pi-5\theta$$

이 때 $\angle XCP(\theta)$는 반직선 $\overrightarrow{CX}$로부터 음의 방향으로 회전한 각의 크기이므로 벡터 $\overrightarrow{CP(\theta)}$ 의 성분을 구하면

$$\overrightarrow{CP(\theta)}=\left(\frac{1}{5}\cos(-\angle XCP(\theta)),\ \frac{1}{5}\sin(-\angle XCP(\theta))\right)=\left(\frac{1}{5}\cos\{-(\pi-5\theta)\},\ \frac{1}{5}\sin\{-(\pi-5\theta)\}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{5}\cos5\theta,\ -\frac{1}{5}\sin5\theta\right)$$

또 원 B의 중심의 좌표를 C 라 하면 $\overline{OC}=1$이므로 벡터 $\overrightarrow{OC}$ 의 성분은

$$\overrightarrow{OC}=(\overline{OC}\cos\theta,\ \overline{OC}\sin\theta)=(\cos\theta,\ \sin\theta)$$

한편 점 $P(\theta)$의 좌표는 벡터 $\overrightarrow{OP(\theta)}$ 의 성분과 같으므로 벡터의 합의 연산에 의하여

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP(\theta)} &= \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP(\theta)}\\ &=\left(\cos\theta-\frac{1}{5}\cos5\theta,\ \sin\theta-\frac{1}{5}\sin5\theta\right)\end{aligned}$$

의 관계가 성립한다. 따라서 $P(\theta)$의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 구하는 매개변수 방정식은

$$x=\cos\theta-\frac{1}{5}\cos5\theta,\quad y=\sin\theta-\frac{1}{5}\sin5\theta$$

이 된다. 이 때 $\theta'=\angle P(\theta)CT=4\theta$이므로 중심선이 $\frac{\pi}{2}$회전할 때 구르는 원 B 위의 점 P는 다시 처음의 접점의 위치로 돌아오게 된다. 이 사실과 제시문의 주어진 공식에 의해 곡선의 자취의 길이 l은

$$l=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

에 의해 구할 수 있다. 이 때 $\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta+\sin5\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta-\cos5\theta$이므로 곡선의 길이 l은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}l&=4\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin\theta+\sin5\theta)^2+(\cos\theta-\cos5\theta)^2}\,d\theta\\ &=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2(\cos\theta\cos5\theta+\sin\theta\sin5\theta)}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos(\theta-5\theta)}\,d\theta\\ &=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2(1-\cos4\theta)}\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\cdot2\sin^22\theta}\,d\theta\\ &=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin2\theta d\theta=4[-\cos2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\end{aligned}$$

따라서 구하는 자취의 곡선의 길이는 8이다.

만일 A와 B의 반지름을 각각 a, b라 하면 $a\theta=b\theta'$의 관계가 성립하므로 $\theta=\frac{b}{a}\theta'$에서 $\theta'=2\pi$일 때 $\theta=2n\pi$ (n은 정수)이면 된다. 즉 $b=na$ 이면 되므로 b가 a의 배수일 때 점 P 가 한 바퀴를 돌면 다시 원래의 출발 위치로 돌아오게 된다.