제26회 생글논술경시대회

고2 자연 유형

유의사항

1. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 도는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용함.
2. 답안이나 답안지의 여백에 답안 이외에 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현, 표시를 한 경우 0점 처리함.
3. 1인당 1장의 답안지에 답안을 작성할 것.

[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

n개의 비둘기 집에 $(n+1)$마리 이상의 비둘기가 들어갔다면, 2마리 이상의 비둘기가 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있어야 한다. 이를 귀류법에 의해 증명해 보자. 만일 결론을 부정하여 n개의 비둘기 집에 각각 1마리 이하의 비둘기가 들어갔다고 가정하면 비둘기의 수는 비둘기 집이 수 n보다 작거나 같아야 한다. 이것은 비둘기의 수가 $(n+1)$마리 이상인 조건에 모순이므로 적어도 하나의 비둘기 집에는 2마리 이상의 비둘기가 있어야 하며 이를 '비둘기집의 원리'라고 한다.

'비둘기집의 원리'를 좀 더 일반화시켜 보자. n개의 비둘기 집에 $(nk+1)$마리 이상의 비둘기가 들어갔다면 n개의 비둘기집에 각각 k마리의 비둘기가 들어갈 때, 전체 비둘기의 수는 nk마리가 되므로 적어도 하나의 비둘기 집에는 $(k+1)$마리 이상의 비둘기가 있어야 한다. 또 n개의 비둘기 집에 m $(m>n)$마리의 비둘기가 들어갔다면, m이 n의 배수인 경우에는 $\dfrac{m}{n}$마리 이상 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다. m이 n이 배수가 아닌 경우에는 $\left(\left[\dfrac{m}{n}\right]+1\right)$마리 이상 들어간 비둘기 집이 적어도 하나 있다. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 5개의 점을 찍을 때, 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이하인 경우가 반드시 존재함을 설명하여라. 또 한 변의 길이가 1인 정육각형 내부에 임의로 7개의 점을 찍을 때, 두 점 사이의 거리가 1 이하인 경우가 반드시 존재함을 설명하여라.

(2) 한경이가 속해 있는 학급의 학생 수는 37명이다. 이들의 생일을 조사하였을 때, 생일이 같은 달인 학생을 가장 많이 포함하고 있는 달에 학생이 적어도 몇 명인지 설명하여라.

(3) 임의의 자연수 11개가 있다. 이 중에는 두 수의 차가 10의 배수가 되는 두 수가 반드시 존재함을 설명하여라. 또 같은 원리로 a, b, c, d가 임의로 주어진 서로 다른 4개의 정수일 때, $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$는 항상 12의 배수가 됨을 설명하여라.

[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots$와 같이 분자가 1인 분수를 단위분수라 한다. 분수 중에는 단위분수의 합으로 표시될 수 있는 것들이 있다. 예를 들면

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \quad \frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}, \cdots$$

와 같은 것들이 있다. 분수를 단위분수의 합으로 표시하는 방법 중에 다음과 같은 단계를 거쳐 표시하는 방법이 있다. 예를 들어 $\dfrac{5}{21}$를 단위분수의 합으로 표시하려면

<계속>

<1단계>

$\dfrac{1}{a}$이 $\dfrac{5}{21}$보다 작으면서 $\dfrac{5}{21}$에 가장 가깝게 되는 정수 a를 찾는다.

$\dfrac{1}{5}<\dfrac{5}{21}$이고 $\dfrac{1}{4}>\dfrac{5}{21}$이므로 $a=5$이다.

<2단계>

$\dfrac{5}{21}$와 $\dfrac{1}{5}$의 차를 계산한다. 즉, $\dfrac{5}{21}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{105}$이다.

다시 <1단계>와 같은 작업을 반복한다.

이렇게 계속하면 $\dfrac{5}{21}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{945}$를 얻을 수 있다.

(1) 단위분수를 이용하여 $\dfrac{4}{7}$와 $\dfrac{5}{8}$의 크기를 비교하여라.

(2) 두 양수 a, b에 대하여

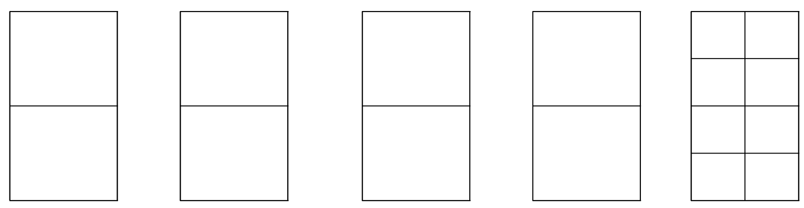
$$\frac{2}{h}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

를 만족하는 h를 a, b의 조화평균이라 한다. a, b가 자연수일 때 조화평균이 4가 되는 서로 다른 두 자연수 a, b를 구하여라.

(3) 1kg짜리 빵이 5개 있다. 이 빵을 8명에게 공평하게 나누어주는 문제를

$$\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

과 같은 단위분수의 합으로 설명할 수 있다. 즉, $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}\right)\times 8=5$이므로 먼저 4개의 빵을 절반으로 나누어 8명에게 나누어준 다음 나머지 1개의 빵을 8등분하여 8명에게 나누어 주면 된다. 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}$을 위와 같은 이야기로 바꾸어 보고, 이를 그림으로 나타내어 설명하여라.

(4) 근세 유럽에는 상업도시를 중심으로 금화환전소가 성업을 이루었다고 한다. 어떤 환전소에서는 a그램짜리 금화 1개를 환전하면 b그램짜리 은화 1개와 c그램짜리 동화 1개로 바꾸어 주는데 다음의 규칙이 성립하도록 하였다고 한다.

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \quad (\text{단, } a, b, c\text{는 } 1<a<b<c\text{인 자연수})$$

어떤 사람이 n그램짜리 금화 1개를 환전한 결과에 6그램짜리 은화가 1개 포함되어 있었다. 1보다 큰 자연수 n의 값으로 가능한 모든 경우를 구하여라. 또 1보다 큰 자연수 n에 대하여 n그램짜리 금화 1개를 위와 같은 규칙에 따라 환전할 수 없는 경우가 있는지를 판단하여라.

[문제 3] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 우함수 혹은 짝수함수라고 한다. 또한 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 일 때, $f(x)$ 를 기함수 혹은 홀수함수라고 한다. 우함수의 우(偶)는 '짝수'를 뜻하고, 기함수의 기(奇)는 '홀수'를 뜻하며, 영어로는 우함수를 'even function', 기함수를 'odd function'이라 한다.

다항함수에 있어서 $y=x^n$의 경우 n이 짝수이면 우함수이고, 홀수이면 기함수이다. 다항함수 이외의 초월함수에서도 우함수와 기함수를 볼 수 있다. 예를 들어, 삼각함수에서 $\cos x$는 우함수이고, $\sin x$는 기함수이다.

(1) $f(x)$와 $g(x)$가 우함수이면 $f(x)g(x)$가 우함수임을 보이시오. 또 $f(x)$가 우함수이고 $g(x)$가 기함수이면 $f(x)g(x)$는 기함수임을 보이시오.

(2) 다음과 같이 정의된 함수를 생각하자.

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

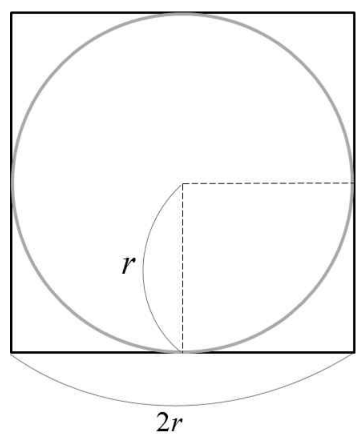
(단, $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 으로 정의되는 무리수이다.)

위의 두 함수를 각각 코사인 쌍곡선 함수, 사인 쌍곡선 함수라고 부르기로 할 때, 각 함수가 우함수인지, 기함수인지를 설명하시오.

(3) 임의의 다항함수는 모두 우함수와 기함수의 합으로 표현할 수 있음을 보이시오. 또 정의역이 모든 실수인 임의의 함수가 우함수와 기함수의 합으로 표현할 수 있는지에 대해서 설명하시오.

[문제 4] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

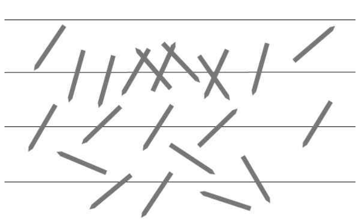
(가) 기하학적 확률의 개념을 이용하여 여러 가지 상황에 대한 확률을 계산할 수 있다. 예를 들어 , 한 변의 길이가 10인 정사각형 $ABCD$에 내접하는 반지름의 길이가 5인 원이 있다고 하자. 임의로 점을 찍을 때 점이 정사각형 내부로만 찍히며 어느 곳이든 점이 찍히게 될 빈도수는 같은 정도로 기대된다고 가정하자. 정사각형 내부에 임의로 점을 찍을 때 점이 원 안에 들어갈 확률을 P라 하면



$$P=\frac{(\text{원의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{\pi\cdot 5^2}{10^2}=\frac{\pi}{4}$$

가 되며 이와 같은 확률의 개념을 기하학적 확률이라 한다. 또 정사각형을 이 확률의 표본공간이라 한다. 실제로 n개의 점을 임의로 찍었을 때, 그 가운데 s개가 원 안에 들어간다면 $\frac{\pi}{4}\fallingdotseq\frac{s}{n}$에서 $\pi\fallingdotseq\frac{4s}{n}$이 된다. 이 관계를 이용하여 π의 근삿값을 확률을 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어, $n=100$이고 $s=78$이면 $\pi=3.12$가 된다.

(나) 18세기 프랑스의 뷔퐁(Buffon :1707~1788)은 '바늘문제'라는 독특하고 흥미로운 원주율 계산법을 제시하였다. 길이가 같은 바늘들을 그 길이와 같은 간격의 평행선을 여러 개 그은 종이 위에 뿌린 후에 평행선에 닿은 바늘의 개수를 센다.



이때, π는 $\dfrac{2\times(\text{전체 바늘의 개수})}{(\text{선과 만난 바늘의 개수})}$ 로부터 근삿값이 구해진다.

그 원리는 다음과 같다.

<계속>

계산을 편리하게 하기 위해서 바늘의 길이를 1로 하자. 바늘의 중심에서 평행선에 가장 가까운 거리를 d라 하고, 바늘이 만든 각을 θ라 하면 바늘과 평행선이 만난 것은 $d\le\frac{1}{2}\sin\theta$ (단, $0\le\theta\le\pi$)일 때이다.

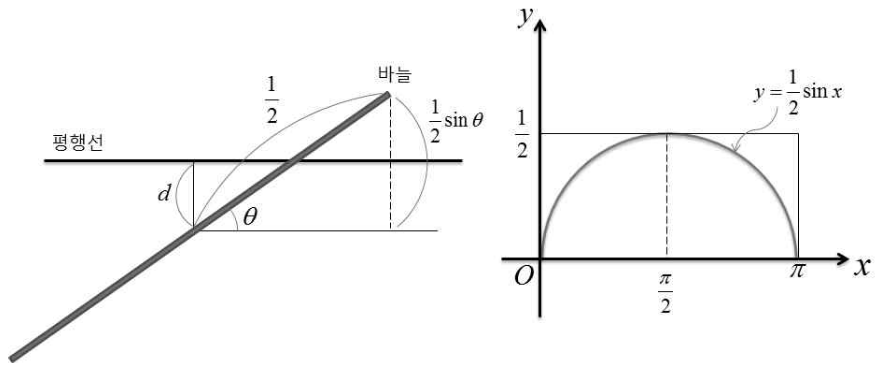
좌표평면에서 $y=\frac{1}{2}\sin x$ $(0\le x\le\pi)$의 그래프를 이용 하면 바늘이 평행선과 만날 확률은

$$\frac{(y=\frac{1}{2}\sin x\text{와 }x\text{축}, 0\le x\le\pi\text{로 둘러싸인 영역의 넓이})}{(x\text{축, }y\text{축, }x=\pi,\ y=\frac{1}{2}\text{로 둘러싸인 영역의 넓이})}$$

로부터 구할 수 있다.

이때, 분자의 도형의 넓이가 1이 됨을 알고 있다면, 분모의 직사각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi$이므로 바늘이 평행선과 만날 확률은 $\frac{2}{\pi}$이다.

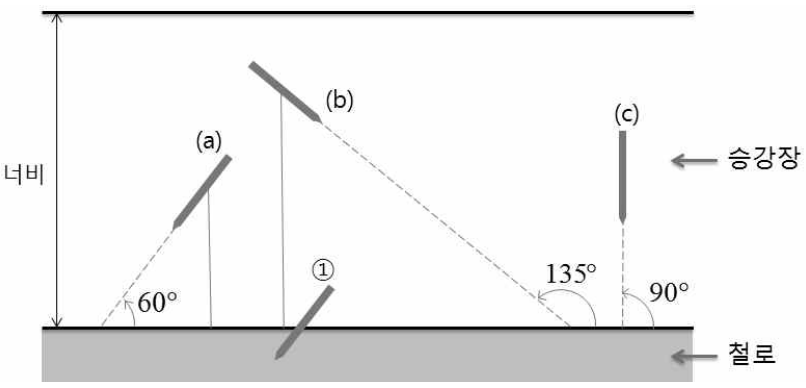
그러므로 $\dfrac{(\text{선과 만난 바늘의 개수})}{(\text{전체 바늘의 개수})}=\dfrac{2}{\pi}$로부터 원주율 π는 $\dfrac{2\times(\text{전체 바늘의 개수})}{(\text{선과 만난 바늘의 개수})}$로부터 근삿값이 구해진다.



(1) 인규와 지혜가 특정 장소에서 만나기로 하였다. 인규는 오전 7시에서 8시 사이의 임의의 시간에 도착하여 10분만 기다리고, 지혜는 오전 7시에서 8시 사이의 임의의 시간에 도착하여 5분만 기다린다고 한다. 인규와 지혜가 도착한 시간을 각각 7시 x분, 7시 y분이라 할 때, x축, y축으로 구성된 좌표평면(표본공간)에서 인규와 지혜가 만나는 경우에 해당하는 영역을 표시하고 둘이 만나게 될 확률을 구하시오. 또 인규 혹은 지혜 둘 중 한 명을 5분 더 기다리게 한다면 누구를 기다리게 해야 만날 확률이 높아질지 판단하고 그 이유를 설명하시오.

(2) 지하철의 승강장에 아래 그림 ①과 같이 철로 변 승강장 가장자리에 걸쳐있는 연필 한 자루가 놓여 있다고 하자. 만일 연필을 무심코 승강장에 떨어 뜨렸을 때 ①처럼 연필이 철로 변 승강장 가장자리에 걸쳐있을 확률은 얼마이겠는가? 이 경우 연필은 부피가 없는 길이 1인 단순 선분이라 하고, 승강장의 너비를 w라 하고, 철로 변 승강장 가장자리 직선을 시초선으로 정하였다. (a), (b), (c) 의 예처럼, 연필의 중심으로부터 시초선까지의 거리와 연필과 시초선이 이루는 각으로 이루어진 좌표들을 표본 공간으로 고려하였다. 단 연필의 중심은 항상 승강장에 놓인다고 가정한다.

(단, $y=\frac{1}{2}\sin x$와 x축, $0\le x\le\pi$로 둘러싸인 영역의 넓이는 1이다.)



한국경제신문