제26회
생글논술경시대회
예시답안

고2 자연 유형

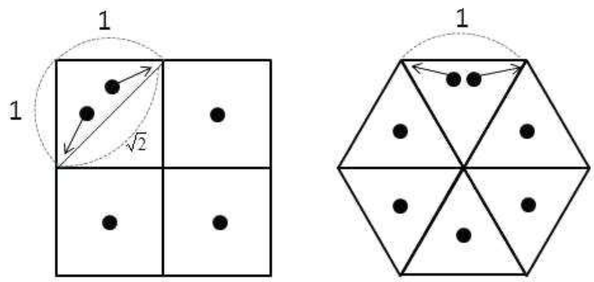
한국경제신문이 만드는 생글생글

<26회 생글논술경시대회 고2 자연계 예시답안>

<고2 자연 논제 해설 및 예시답안>

[문제 1]

(1) 한 변의 길이가 2인 정사각형을
의 정사각형으로 나눌 수 있다. 비둘
개의 비둘기집에 5마리의 비둘기가 들
도 2개의 점이 하나의 작은 정사각형
이게 된다. 이 때, 두 점이 작은 정사
에 놓이게 되는 경우에 두 점 사이의
따라서 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하



한 변의 길이가 1인 4개
기집의 원리에 의하여 4
어가는 경우이므로 적어
의 내부 또는 경계에 놓
각형의 대각선의 양 끝범
거리가 가장 멀게 된다.
인 것이 반드시 있다.

또 한 변의 길이가 1인 정육각형을 한 변의 길이가 1인 6개의 정삼각형으로 나눌 수 있다. 비둘기집의 원리에 의하여 6개의 비둘기집에 7마리의 비둘기가 들어가는 경우이므로 적어도 2개의 점이 하나의 정삼각형의 내부 또는 경계에 놓이게 된다. 이 때, 두 점이 정삼각형의 두 꼭짓점에 놓이게 되는 경우에 두 점 사이의 거리가 가장 멀게 된다. 따라서 두 점 사이의 거리가 1 이하인 것이 적어도 한 쌍 있다.

(2) 1년은 12달이고 $37=12\times3+1$이므로 비둘기집을 12개, 비둘기를 37마리인 것으로 생각하면 비둘기집의 원리에 의하여 생일이 같은 달인 학생을 가장 많이 포함하고 있는 달에 학생이 적어도 4명이 있다.

(3) 자연수를 10으로 나눈 나머지는 0, 1, 2, $\cdots$, 9 중에서 하나로 어떤 자연수를 10으로 나누었을 때, 나머지가 될 수 있는 수는 모두 10개뿐이다. 따라서 임의의 11개의 자연수 중에는 10으로 나누었을 때 나머지가 r로서 같은 두 수가 반드시 존재한다.
이 때, 이 두 수를 $a=10m+r$, $b=10n+r$ (m, n은 자연수이고, $0\le r\le 9$)라 하면

$$a-b=10m+r-(10n+r)=10(m-n)$$

따라서 임의의 자연수 11개 중에 두 수의 차가 10의 배수가 되는 두 수가 반드시 존재한다.

$P=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$라 하자.

ⅰ) a, b, c, d를 3으로 나누었을 때 $3k$, $3k+1$, $3k+2$ (k는 정수) 중 하나로 표현할 수 있으므로 a, b, c, d 중에서 적어도 2개는 3으로 나누었을 때 나머지가 같다. 따라서 P는 3으로 나누어 떨어진다.

ⅱ) a, b, c, d를 4로 나누었을 때 나머지가 같은 것이 적어도 2개 있으면 P는 4로 나누어 떨어진다. a, b, c, d를 4로 나누었을 때 나머지가 모두 다르면 a, b, c, d는 $4k, 4k+1$, $4k+2$, $4k+3$ (k는 정수) 중 하나로 표현할 수 있으므로 a, b, c, d 중 2개는 짝수, 2개는 홀수이다. 이 때, a, b가 짝수, c, d가 홀수라 가정하면 $b-a$와 $d-c$는 모두 짝수가 되어 $(b-a)(d-c)$는 4의 배수가 된다.

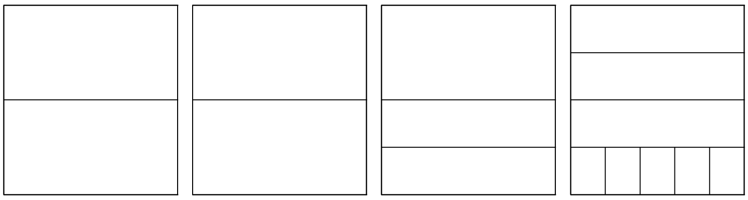
ⅰ), ⅱ)에서 P는 3과 4의 배수이므로 12의 배수이다.

[문제 2]

(1) $\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ 이고 $\frac{5}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$이므로 $\frac{5}{8}$이 크다.

(2) 조화평균이 4이므로 좌변은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다. $\frac{1}{2}$을 두 개의 단위분수의 합으로 표시하면 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$이다. 따라서 서로 다른 두 자연수는 3과 6이다.

(3) 1kg짜리 빵 4개를 5명에게 나누어주는 문제이다. $\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$의 뜻은 한 사람에게 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)$kg씩 5명에게 나누어준다는 뜻으로 이를 그림으로 나타내면 아래와 같다.



(4) $\frac{1}{n}=\frac{1}{6}+\frac{1}{c}$을 만족하는 n을 모두 구하는 문제이다.

문자는 모두 자연수이므로 $\frac{1}{n}>\frac{1}{6}$이다. 따라서 $n<6$이므로 $n=2,3,4,5$의 네 경우가 가능하다.

$n=2$일 때, $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$이므로 3그램짜리 은화를 받으므로 맞지 않다.

$n=3$일 때, $\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$이므로 4그램짜리 은화를 받으므로 맞지 않다.

$n=4$일 때, $\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$이므로 6그램짜리 은화를 받는 경우가 있다.

$n=5$일 때, $\frac{1}{5}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$이므로 6그램짜리 은화를 받는다.

따라서 4그램 또는 5그램짜리 금화를 1개 환전할 때, 6그램짜리 은화를 1개 받는다.

정수 n에 대하여 $\frac{1}{n}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$인 자연수 b, c가 항상 존재하는지 확인하는 문제이다. 양변에 nbc를 곱하면 $bc=nb+nc$이고 이를 곱의 형태로 변형하면

$(b-n)(c-n)=n^2$ ⋯ ①

이다. ①에서 n^2을 서로 다른 두 정수의 곱으로 나타내는 방법 중에 $1\times n^2$은 항상 가능하므로 $b=n+1$, $c=n+n^2=n(n+1)$이면 된다. 따라서 환전할 수 없는 경우는 없다.

참고로 환전 결과는 여러 가지가 있을 수 있다. 예를 들어 $n=6$이면 $n^2=36$이므로 $b-6$과 $c-6$이 각각 1과 36, 2와 18, 3과 12, 4와 9가 되는 4가지 경우가 있다. 따라서 (은화의 개수, 동화의 개수) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)가 모두 가능하다.

[문제 3]

(1) f와 g가 우함수이면 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$이 성립한다. 이 때 $h(x)=f(x)g(x)$라 하면 $h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=h(x)$이므로 $f(x)g(x)$는 우함수이다.
또, f가 우함수이고 g가 기함수이면 $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이 성립한다. 이 때 $I(x)=f(x)g(x)$라 하면 $I(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-I(x)$이므로 $f(x)g(x)$는 기함수이다.

(2) 코사인 쌍곡선 함수 $\cosh(x)$에 대해 $\cosh(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=\cosh(x)$이 성립하므로 코사인 쌍곡선 함수는 우함수이다. 또 사인 쌍곡선 함수 $\sinh(x)$에 대해 x대신 $-x$를 대입하면 $\sinh(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=-\sinh(x)$이 성립하므로 사인 쌍곡선 함수는 기함수이다.

(3) 임의의 다항함수 $f(x)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ (단, n은 양의 정수)
이 때 $f(x)$를 다음과 같이 우함수 부분과 기함수 부분의 합으로 표현할 수 있다.
$f(x)=(a_0+a_2x^2+a_4x^4+\cdots+a_nx^n)+(a_1x+a_3x^3+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})$ (단, n은 짝수일 때이다. n이 홀수일 경우에는 첫 번째 괄호와 두 번째 괄호 안의 마지막 항을 서로 바꾸면 된다.)
또, 정의역이 실수인 임의의 함수는 항상 다음과 같이 변형하여 나타낼 수 있다.

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

이 때 첫 번째 항 $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ 에 $-x$를 대입하면 자기 자신과 같으므로 첫 번째 항이 우함수 부분이 된다. 또 두 번째 항에 $-x$를 대입하면

$$\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

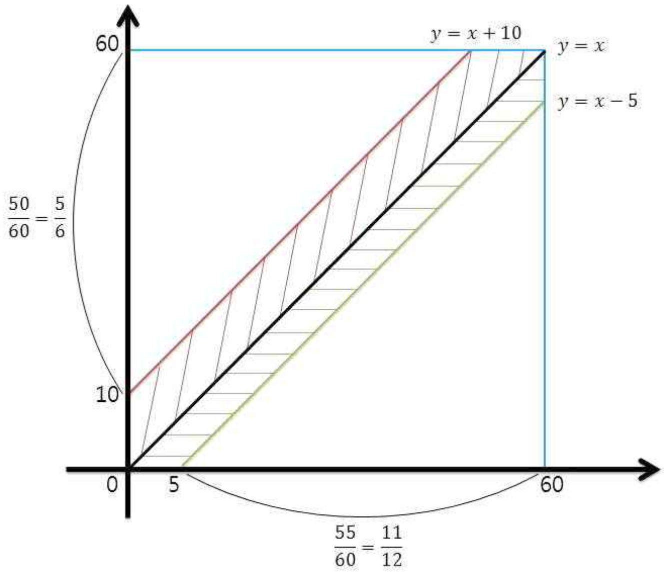
가 되어 두 번째 항은 기함수 부분이 된다.
따라서 정의역이 실수인 임의의 함수는 언제나 우함수와 기함수의 합으로 표현할 수 있다.

[문제 4]

(1) 인규가 먼저 도착할 때와 지혜가 먼저 도착할 때로 나누어 생각해 보자.
인규가 먼저 도착할 때는 $x<y$일 때이고 인규는 10분만 기다리므로 $y-x<10$일 때 인규와 지혜가 만나게 된다. 또, 지혜가 먼저 도착할 때는 $x \geq y$일 때이고 지혜는 5분만 기다리므로 $x-y \leq 5$일 때 인규와 지혜가 만나게 된다. 다시 정리하면

$$y>x \text{ 일 때 } y<x+10$$
$$y \leq x \text{일 때 } y \geq x-5$$

를 만족할 때이고, 이를 좌표평면에서 나타내면 다음과 같다.



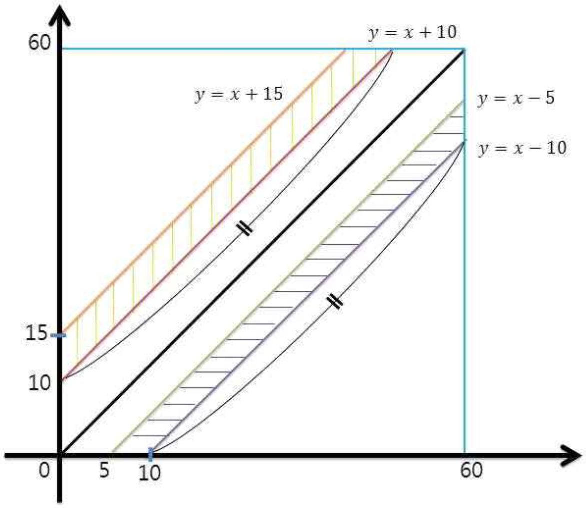
<그림 1>

위의 표본공간에서 빗금친 영역의 전체 면적에 대한 비율이 둘이 만나게 될 확률이 된다.
따라서 전체 면적을 1이라 할 때 빗금친 영역의 넓이가 곧 확률이 된다. 이 때의 넓이는

$$1-\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{11}{12}\times\frac{11}{12}\right)=1-\left(\frac{25}{72}+\frac{121}{288}\right)=1-\frac{221}{288}=\frac{67}{288}$$

따라서 둘이 만나게 될 확률은 $\frac{67}{288}$이다.

만일 인규가 5분을 더 기다린다면 표본공간에서 위쪽의 경계선이 $y=x+10$에서 $y=x+15$로 이동하게 되고, 지혜가 5분을 더 기다린다면 아래쪽의 경계선이 $y=x-5$에서 $y=x-10$으로 이동하게 된다. 이 때 늘어난 영역을 표시하면 다음 그림과 같다.



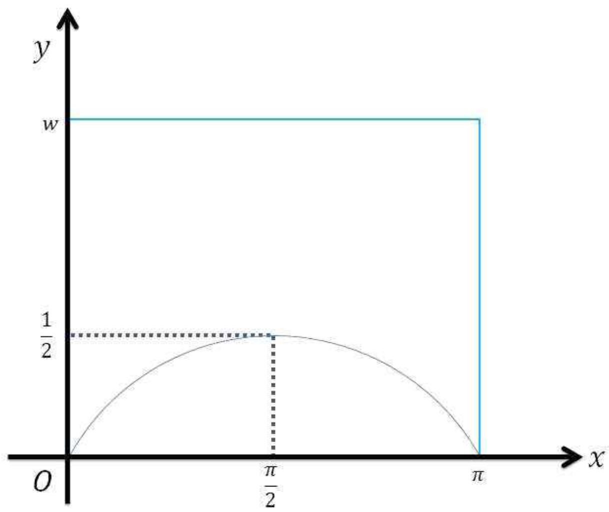
<그림 2>

표시된 부분의 길이가 같으므로 이를 기준으로 판단하면 $y=x-5$에서 $y=x-10$으로 이동할 때 늘어난 영역이 더 커지게 됨을 알 수 있다. 따라서 지혜를 5분 더 기다리게 할 때 둘이 만날 확률이 더 높아지게 된다.

(2) 연필의 중심과 철로 변 승강장 가장 자리까지의 거리를 y라 하고, 승강장 가장자리 직선을 시초선이라 할 때 연필과 시초선이 이루는 각을 x라 하면 제시문에서와 같이

$$y \le \frac{1}{2}\sin x \quad (\text{단, } 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le w)$$

일 때 연필이 철로 변 승강장 가장자리에 걸쳐 있게 된다. 이 때의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



<그림 3>

위에서 전체 표본공간의 넓이는 πw이고 표본공간 내에서 x축과 $y=\frac{1}{2}\sin x$로 둘러싸인 영역의 면적은 1로 주어졌으므로 구하는 확률은 $\frac{1}{\pi w}$이다.