

제25회 생글논술경시대회

고3 자연 유형

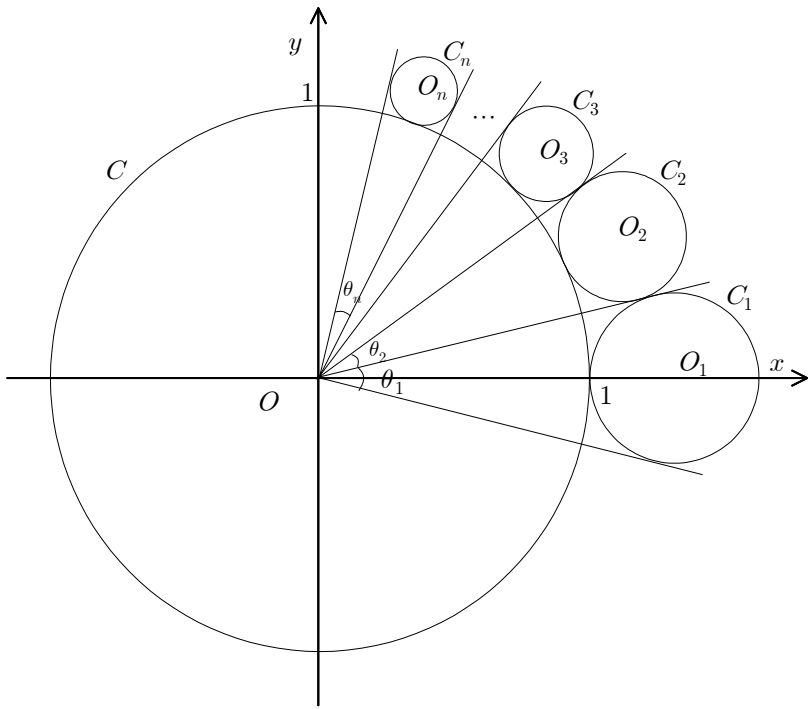
유의사항

1. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용함.
2. 답안이나 답안지의 여백에 답안 이외에 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현, 표시를 한 경우 0점 처리함.
3. 1인당 1장의 답안지에 답안을 작성할 것.

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

아래 그림과 같이 단위원 C 와 $(1, 0)$ 에서 외접하는 원을 C_1 이라 하고 C_1 의 접선에 접하고 C 에 외접하는 원을 C_2 , C_2 의 접선에 접하고 C 에 외접하는 원을 C_3, \dots, C_{n-1} 의 반시계 방향의 접선에 접하고 C 에 외접하는 원을 C_n 이라 하고 $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ 의 중심을 $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n$ 라 하자.

또한 C_1, C_2, \dots, C_n 의 접선들이 이루는 각을 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$, $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ 의 반지름을 $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ 이라 정의한다.



[문제 1]

r_n 과 θ_n 사이의 관계식을 구하시오.[10점]

[문제 2]

$r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n$ 이 성립하고 C_n 이 4사분상에서 C_1 의 접선에 접할 때 원 C_1, \dots, C_n 들의 둘레의 합 $L(n)$ 의 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$ 을 구하시오.[10점]

(단, n 은 자연수)

[문제 3]

$(0, \infty)$ 에서 $\sin x < x$ 가 성립함을 보이시오.[10점]

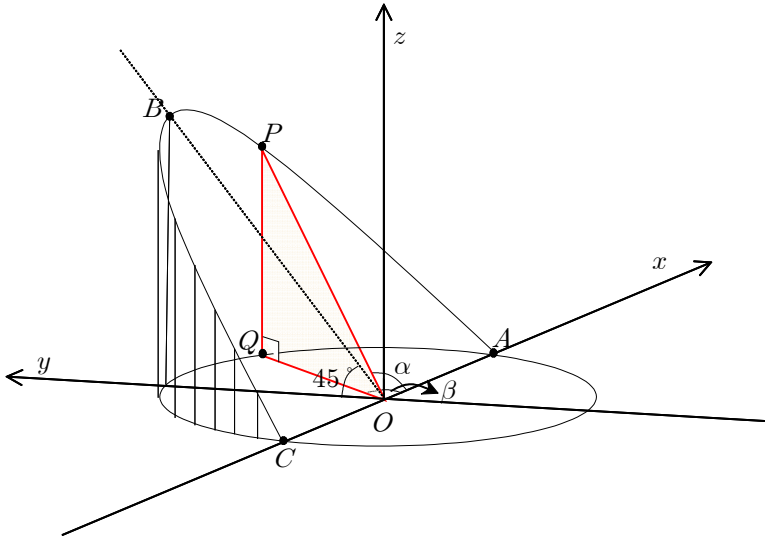
[문제 4]

$r_n = \frac{1}{n}$ 일 때, n 이 무한히 커질 때, C_n 과 C_1 이 겹쳐질 수 있음을 보이시오.[15점] (단, n 은 자연수)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

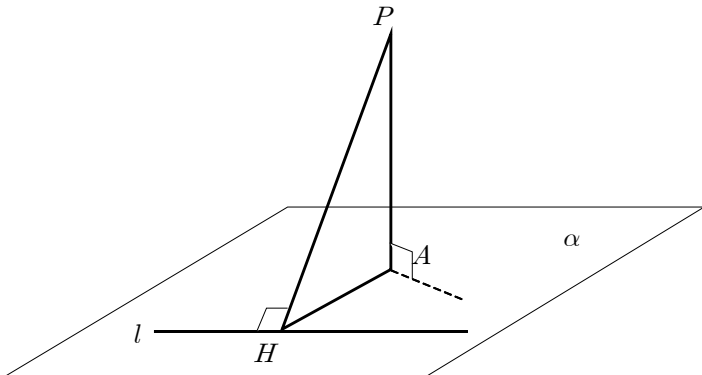
(가)

아래 그림은 원기둥 $x^2 + y^2 = 1 (z \geq 0)$ 에 대해 x 축을 품고 xy 평면과 45° 의 각을 이루는 평면으로 원기둥을 자른 것이다. P 가 A 에서 반시계 방향으로 yz 평면상의 점 B 를 지나 xy 평면상의 점 C 까지 이동에 가고 P 의 xy 평면으로의 수선의 발을 Q , $\angle POA$, $\angle QOA$ 를 각각 α , β 라 한다.



(나)

[삼수선의 정리] 아래 그림과 같이 어떤 평면 α 가 품은 직선 l 과 l 이외의 점 A , α 외부의 점 P 에 대해 $\overline{PA} \perp \alpha$ 이고 $\overline{PH} \perp l$ 이면, $\overline{AH} \perp l$ 이 성립한다.(단, 점 $H \in l$)



(다)

[이면각의 크기] 어떤 평면 α 와 β 가 만나서 발생하는 교선을 L 이라 할 때, 두 평면 α, β 가 이루는 각은 $L \perp l_1, L \perp l_2$ 일 때, l_1 과 l_2 가 이루는 각과 같다. (단, $l_1 \in \alpha, l_2 \in \beta$ 이다.)

(라)

[사잇값 정리] $f(x)$ 가 폐구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$ 를 만족하면 $f(c) = 0$ 인 c 가 개구간 (a, b) 사이에 존재한다.

(마)

[정적분과 공간도형의 부피] x 의 구간 $[a, b]$ 에 존재하는 공간도형에 대해 평면 $x = t$ 로 공간도형을 잘랐을 때의 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하고 $[a, b]$ 에서 $S(t)$ 가 연속이면 공간도형의 부피 $V = \int_a^b S(t)dt$ 와 같다.

[문제 5]

α, β 사이의 관계식을 구하시오.[10점]

[문제 6]

$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\frac{\pi}{2} - \beta}$ 의 극한값을 구하시오[10점]

[문제 7]

방정식 $\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{\sqrt{2}\beta}{1+\beta}$ 를 만족하는 β 가 $(0, \pi)$ 사이에 존재함을 설명하시오.[15점]

[문제 8]

공간도형 $PQOA$ 의 부피를 $V(\beta)$ 라 할 때, 아래 보기를 참고 $V(\beta)$ 를 나타내고 $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{V(\beta)}{\alpha^2}$ 을 구하시오[20점]