제25회
생글논술경시대회
해제 및 예시답안

고3 자연 유형

한국경제신문이 만드는
생글생글

[문항 1 체점기준]

1) - 직각삼각형을 이용하여 삼각비를 사용한 경우[3점]

- 답이 맞은 경우[7점]

2) - $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$을 나타낸 경우[3점]

- L_n의 관계식을 올바르게 나타낸 경우[4점]

- 초월함수의 극한을 이용하여 올바른 결론을 내린 경우[3점]

3) - $f(x) = x - \sin x$로 올바르게 가정한 경우[2점]

- 미분을 이용하여 $f'(x)$를 올바르게 나타낸 경우[5점]

- $f(x)$가 증가함수라는 사실로부터 올바른 결론을 내린 경우[3점]

※ $f(x) = x$, $g(x) = \sin x$에 대해 $f(0) = g(0)$이고 $f'(x) > g'(x)$를 설명한 경우도 답으로 인정한다.

4) - $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n > 2\pi + \dfrac{\theta_1}{2}$임을 나타낸 경우[5점]

($\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n > 2\pi$로 나타낸 경우 -2점)

- 1)의 관계식과 3)의 부등식을 이용, $\theta_n > \dfrac{2}{n+1}$을 유도한 경우[5점]

- $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n+1} > 2\pi$를 논증한 경우[5점]

[문항 1 예시답안]

1) C_n과 접선의 접점을 H_n이라 하면, 직각$\triangle OO_nH_n$에서 $\sin\angle O_nOH_n = \dfrac{\overline{O_nH_n}}{\overline{OO_n}} \Leftrightarrow \sin\dfrac{\theta_n}{2} = \dfrac{r_n}{1+r_n}$

이 성립한다.

2) C_n이 C_1의 4사분면 상의 접선에 접하기 위해서는 $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$이다. 1)의 관계식을 정리하면,

$$r_n = \frac{\sin\frac{\theta_n}{2}}{1-\sin\frac{\theta_n}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} \text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} n(2\pi r_n) = \lim_{n\to\infty} 2\pi n \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi^2 \left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi^2 \text{이다.}$$

3) $f(x) = x - \sin x$라고 하면, $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.
따라서 $f(x) > f(0) = 0 \Leftrightarrow x > \sin x$가 성립한다.

4) 1)의 관계식을 이용, $\sin\dfrac{\theta_n}{2} = \dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n+1}$이고 3)의 부등식을 이용,

$\dfrac{\theta_n}{2} > \sin\dfrac{\theta_n}{2} = \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow \theta_n > \dfrac{2}{n+1}$이 성립한다.

한편, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n+1} = 2\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots\right\}$

$$= 2\left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\cdots\right\}$$

$= 1+1+1+\cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \infty > 2\pi + \frac{\theta_1}{2} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$이다. 즉, 원 C_n이 C_1과

겹쳐진다.

($\because \sin\dfrac{\theta_1}{2} = \dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{\theta_1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$)

[문항 2 채점기준]

5) - 나)를 이용, $\overline{PH} \perp \overline{QH}$를 나타낸 경우[3점]

- $(\overline{OH}, \overline{QH}) = (\cos\theta, \sin\theta)$를 나타낸 경우[2점]

- 다)를 이용, $\angle PHQ = \dfrac{\pi}{4}$를 구한 경우[2점]

- 관계식을 올바르게 나타낸 경우[3점]

6) - $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}-$일 때, $\beta \to \dfrac{\pi}{2}-$를 설명한 경우[2점]

- 초월함수의 극한을 이용한 식의 전개가 있는 경우[3점]

- 올바른 결론을 나타낸 경우[5점]

7) - $\dfrac{d\alpha}{d\beta}$를 올바르게 나타낸 경우[5점]

- 연속성에 대한 설명을 한 경우[2점]

- 부호판별을 올바르게 한 경우[5점]

- 마)를 통한 올바른 결론을 내린 경우[3점]

8) - $V(\beta)$를 나타내는 아이디어가 맞은 경우[3점]

- 보기를 이용하여 $V(\beta)$를 올바르게 나타낸 경우[10점]

- $\alpha \to 0+$일 때, $\beta \to 0+$를 설명한 경우[2점]

- 라)를 이용하여 올바른 극한을 구한 경우[5점]

[문항 2 예시답안]

5) P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면, 나)에 의해 $\overline{QH}\perp\overline{OH}$이므로 $(\overline{OH},\ \overline{QH})=(\cos\beta,\ \sin\beta)$이고

다)에 의해, 평면 OAP와 xy평면이 이루는 이면각이 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\overline{PH}=\sqrt{2}\,sin\beta$이다.

따라서 직각$\triangle POH$에서 $\tan\alpha=\frac{\overline{PH}}{\overline{OH}}=\sqrt{2}\,tan\beta$이 성립한다.

6) P가 B에 접근할 때, Q는 y축에 접근하므로

$\alpha\to\frac{\pi}{2}-$일 때, $\beta\to\frac{\pi}{2}-$이다.

따라서 $$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha}{\frac{\pi}{2}-\beta}=\left(\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\right)\times\left(\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}\right)\times\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{이다.}\left(\because 5)\text{에서 }\frac{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}=\frac{\cot\alpha}{\cot\beta}=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

7) 5)의 관계식을 β에 대해 미분하면, $\sec^2\alpha\frac{d\alpha}{d\beta}=\sqrt{2}\,sec^2\beta$이다.

즉, $$\frac{d\alpha}{d\beta}=\sqrt{2}\,\frac{\sec^2\beta}{\sec^2\alpha}=\sqrt{2}\,\frac{\sec^2\beta}{1+\tan^2\alpha}=\sqrt{2}\,\frac{\sec^2\beta}{1+2\tan^2\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\beta+2\sin^2\beta}=\frac{\sqrt{2}}{1+\sin^2\beta}\text{이다.}$$

한편, $f(\beta)=\frac{d\alpha}{d\beta}-\frac{\sqrt{2}\,\beta}{\beta+1}$라 하면, "연속함수의 성질"에 의해 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이고 $\lim_{\beta\to0+}f(\beta)=\sqrt{2}>0$,

$$\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}f(\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}+1}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+\frac{2}{\pi}}\right)<0(\because\pi>2)$$

즉, $\left(\lim_{\beta\to0+}f(\beta)\right)\times\left(\lim_{\beta\to\frac{\pi}{2}-}f(\beta)\right)<0$이므로 라)에 의해, $f(c)=0\Leftrightarrow\frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{\sqrt{2}\,\beta}{1+\beta}$인 $c\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\subset(0,\ \pi)$가 존재한다

따라서 $\frac{d\alpha}{d\beta}=\frac{\sqrt{2}\,\beta}{1+\beta}$인 β가 $(0,\ \beta)$에 존재한다.

8) 공간도형 $PQOA$는 삼각뿔 $O-PQH$와 도형 $PQHA$의 부피의 합이다.

마)의 방법을 이용, $x=t$일 때(단. $t\in[\overline{OH},\ \overline{OA}]=[\cos\theta,\ 1]$

단면은 밑변과 높이가 $\sqrt{1-t^2}$인 직각이등변$\triangle$이므로($\because 5$) 참조)

$S(t)=\dfrac{1}{2}\left(1-t^2\right)$이다.

따라서

$$V(\beta)=\frac{1}{3}(\triangle PQH)\overline{OH}+\int_{\overline{OH}}^{\overline{OA}} S(t)dt=\frac{\cos\beta\sin^2\beta}{6}+\frac{1}{2}\int_{\cos\beta}^{1}\left(1-t^2\right)dt$$

$$=\frac{\cos\beta\sin^2\beta}{6}+\frac{1}{2}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{\cos\beta}^{1}=\frac{\cos\beta\sin^2\beta}{6}+\frac{1}{3}+\frac{\cos^3\beta}{6}-\frac{\cos\beta}{2}$$

$$=\frac{\cos\beta\left(\sin^2\beta+\cos^2\beta\right)}{6}-\frac{\cos\beta}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1-\cos\beta}{3}$$ 이다.

한편, P가 A에 위치할 때, Q도 A에 위치하므로

즉, $\alpha\to 0+$일 때, $\beta\to 0+$이므로

$$\lim_{\alpha\to 0+}\frac{V(\beta)}{\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0+}\frac{1-\cos\beta}{3\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{3\alpha^2}\times\left(\frac{\sin^2\beta}{1+\cos\beta}\right)$$

$$=\left(\lim_{\alpha\to 0+}\frac{1}{3}\left(\frac{\tan\alpha}{\alpha}\right)^2\right)\times\left(\lim_{\beta\to 0+}\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{1+\cos\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\tan\beta}\right)^2\right)\left(\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right)^2$$

$=\dfrac{1}{12}$이다. $\left(\because 6\right)$에서 $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)$