제25회 생글논술경시대회

고2 자연 유형

유의사항

1. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 또는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용함.
2. 답안이나 답안지의 여백에 답안 이외에 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현, 표시를 한 경우 0점 처리함.
3. 1인당 1장의 답안지에 답안을 작성할 것.

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

현재가치란 장래의 이익이나 손실을 현재를 기준으로 계산한 것으로 채권투자에서 가장 기본적인 개념이다.
예를 들어 설명하면, 연이율이 10%인 은행에 오늘 100만원을 입금하면 1년 뒤에는 이자$(100\times 0.1=10)$와 원금을 합쳐 110만원, 2년 뒤에는 $100\times(1+0.1)^2=121$만원을 받게 되므로 내년에 받게 될 110만원, 2년 후에 받게 될 121만원은 본질적으로 현재의 100만원과 동일한 가치를 갖는다는 것이다.
이를 이용 내년에 받게 되는 100만원의 현재가치를 x라 하면, 이자 $0.1x$와 원금 x를 합하여 $1.1x=100$만원이므로 약 $\frac{100}{1.1}\fallingdotseq 90$만원의 가치를 가진다고 생각할 수 있다.
(단, 이자율 이외의 요인은 고려하지 않는다.)

[문제 1]

평창 동계올림픽 쇼트트랙 금메달리스트 한경이는 연금으로 매년 100만원의 금액을 1년 후 부터 영원히 받을 수 있다고 할 때, 이 연금의 현재가치 P를 구하시오.(단, 이자율은 10%로 일정)[7점]

[문제 2]

현시점에서 1년 후에는 100만원, 2년 후에는 $100(1+r)$만원, 3년 후에는 $100(1+r)^2$원,... 이렇게 지급액이 매년 $(1+r)$의 비율로 늘어나는 연금이 영원히 지급된다고 할 때, 이 연금의 현재가치는? (단, 연이율 은 매년 10%로 동일하고 $r\in(0,1)$ 이다.) [10점]

[문제 3]

한경이가 아래의 두 연금 중 한 가지를 택할 수 있다고 할 때, B연금을 택하는 것이 A연금을 택하는 것보다 이득이 되게 하는 집합 $A=(n,\,100r)$에 대해 논하시오. (단, 이자율은 항상 10%로 일정하고 $n,\,r>0$이다.)[10점]

A : 내년에 100만원을 시작으로 매년 $(1+r)$의 비율로 증가
B : n년 후부터 매년 200만원씩 일정하게 수령

[문제 4]

집합 A를 좌표평면 상에 도식하고 $n,\,100r$이 자연수라고 할 때, $_{n}(A)$를 구하시오.[13점]
$(1.1^3=1.331,\ 1.1^5=1.610,\ 1.1^7=1.9487\cdots$등을 이용해 볼 것)

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

수열 $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$은 $a_n \neq -1$이고

$a_n = 1 + (a_0 + 1)(a_1 + 1)\cdots(a_{n-1} + 1)$ $(n \geq 1)$으로 정의된다.

(나)

자연수 n에 관한 명제 $p(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립한다는 것을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

$n = 1$일 때 명제 $p(n)$이 성립함을 증명

$n = k$일 때 명제 $p(k)$이 성립한다고 가정하고, $n = k+1$일 때에도 명제 $p(k+1)$이 성립함을 증명

[문제 5]

수열 $\{a_n\}$에서 $n \geq 1$일 때 $\dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$을 a_n만을 사용하여 표현하시오. [10점]

[문제 6]

(나)를 이용하여 a_n을 n과 a_0를 사용하여 표현하시오. $(n \geq 1)$ [10점]

(HINT : 가)로부터 a_n의 일반항을 유추해 볼 것)

[문제 7]

임의의 실수 x에 대해 $f(a_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_n^2 - 1} = x$을 만족하는 a_0의 개수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$의 개형을 나타내시오.[17점]

※ 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.

(가)

$[a, b]$에 연속이고, (a, b)에서 미분 가능한 임의의 함수 $g(x)$에 대해, $\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$인 c가 존재한다. (단, $a < c < b$)

(나)

$f(x)$가 $[0, 1]$에서 연속, $(0, 1)$에서 미분 가능한 함수 $f(x)$가 $(0, 1)$에서 $f''(x) < 0$이다. ($f'(x)$는 미분가능하다.)

[문제 8]

(나)의 조건을 만족하는 함수 f에 대해 가)의 평균값정리를 이용, 임의의 실수 x, t에서 $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$이 성립함을 보이시오.[13점] (단, $x \in [0, 1]$, $t \in (0, 1)$)

[문제 9]

2) $\int_0^1 f(x)dx \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$이 성립함을 보이시오.[10점]