# 제24회 생글논술경시대회

## 고2 자연 유형

### 유의사항

1. 답안 작성 필기구는 반드시 흑색 도는 청색 펜이나 연필 가운데 통일된 한 종류의 필기구만 사용함.
2. 답안이나 답안지의 여백에 답안 이외에 불필요한 낙서나 이와 유사한 표현, 표시를 한 경우 0점 처리함.
3. 1인당 1장의 답안지에 답안을 작성할 것.

**[문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간 $I$에 속하는 임의의 두 수 $a$, $b$에 대하여 $a<b$일 때, $f(a)<f(b)$이면 $f(x)$는 구간 $I$에서 증가한다고 한다.

(1)
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능하며 구간 $(a, b)$의 모든 점에서 도함수 $f'(x)$의 값이 항상 양수이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 증가함을 보이시오.

(2)
$y=x^3a^{-x}(a>1)$ 의 그래프의 개형을 그리시오.
(단, $\lim_{x\to\infty} x^3a^{-x}=0$ 이다.)

(3)
$3^{\pi}$과 $\pi^3$의 크기를 비교하시오.

(4)
(2)의 그래프를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{a^x}=0$ 임을 보이시오.

**[문제 2] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가) 1, 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$ 로 이루어진 수열 $\{a_n\}$을 피보나치 수열이라 한다. 이 때 수열 $\{a_n\}$을 $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 과 같이 귀납적으로 정의할 수 있다. 수열 $\{a_n\}$에 대해 이웃한 두 항의 비 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$은 일정한 값으로 수렴한다는 사실이 알려져 있다.

(나) 주어진 어떤 선분을 긴 부분과 짧은 부분으로 나눌 때 선분 전체의 길이와 긴 부분의 길이의 비가 긴 부분의 길이와 짧은 부분의 길이의 비와 같을 때 이 비를 황금비라고 정의한다.

(1)
(나)에서 정의된 황금비를 구하고, 이 값이 (가)의 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$의 극한값과 같음을 보이시오.

(2)
실수 $c_1\neq 0$, $c_2\neq 0$ 인 실수로 이루어진 수열 $\{c_n\}$에 대해 $c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$ 의 관계가 성립한다고 한다. $k>4$ 에서 처음으로 $c_k=0$ 을 만족할 때 $\frac{c_1}{c_2}$가 정수가 아님을 보이시오.

**[문제 3]  다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(가)  함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 상수 $m, M$에 대해 $m \le f(x) \le M$ 이 성립하면,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

가 성립한다.

(나)  닫힌구간 $[a, b]$에서 $f(x), g(x)$가 연속일 때, $f(x) \ge g(x)$ 이면

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

가 성립한다.

(1)  $n$을 2이상의 정수라 할 때, 부등식

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \cdots +\frac{1}{n} < 1+\ln n$$

이 성립함을 보이시오. (단, $\ln x = \log_e x$,  $e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ )

(2)  (1)의 결과를 사용하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ \cdots +\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$$

이 성립함을 보이시오.

(3)  $n$ 이 2 이상의 자연수일 때

$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$ 임을 이용하여 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n}x\,dx$ 의 값을 구하시오.

(4)  $a_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x\,dx$ 이라 놓을 때 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1$ 이 성립함을 설명하시오.