제24회
생글논술경시대회
예시답안

고2 자연 유형

한국경제신문이 만드는

생글생글

[문제 1]

(1) 닫힌구간 $[a, b]$에 속한 임의의 $x_1 < x_2$ 에 대하여 $f(x)$는 미분가능하므로 닫힌구간 $[x_1, x_2]$에서 미분가능하고 열린구간 (x_1, x_2)에서 미분가능하다. 따라서 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$ 인 c가 열린구간 (x_1, x_2)에 존재한다. 조건에 의해 $f'(c)>0$ 이므로 $f(x_2)>f(x_1)$ 이 성립한다. 따라서 $f(x)$는 증가함수이다.

(2) $y'=3x^2a^{-x}+x^3a^{-x}\ln a\cdot(-1)=x^2a^{-x}(3-x\ln a)$ 이므로

$x<\dfrac{3}{\ln a}$일 때, $y'>0$이고, $x>\dfrac{3}{\ln a}$일 때, $y'<0$ 이므로 $x=\dfrac{3}{\ln a}$에서 극대이다.

또, $y''=a^{-x}\{3x^2-x^3\ln a\}'=a^{-x}\ln a\cdot(-1)(3x^2-x^3\ln a)+a^{-x}(6x-3x^2\ln a)$

$=xa^{-x}\{(x\ln a)^2-6(x\ln a)+6\}=xa^{-x}\{x\ln a-(3+\sqrt{3})\}\{x\ln a-(3-\sqrt{3})\}$

이므로 $x=0,\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{\ln a},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{\ln a}$ 에서 변곡점을 가진다.

(3) (2)의 그래프의 개형으로부터 $y=x^3a^{-x}$ 는 $x=\dfrac{3}{\ln a}$일 때 극대이므로 $x>\dfrac{3}{\ln a}$ 에서 그래프는 감소한다. 이 때 $a>1$ 이므로 $f(x)=x^3 3^{-x}$의 그래프도 $x>\dfrac{3}{\ln 3}$ 에서 감소한다.

이 때, $\ln 3>\ln e=1$ 이므로 $\dfrac{3}{\ln 3}<3<\pi$ 이고 이 구간에서 $f(x)$는 감소하므로 $f(3)>f(\pi)$ 이다. 따라서 부등식 $3^3\cdot 3^{-3}>\pi^3\cdot 3^{-\pi}$ 이 성립한다. 양변에 3^π을 곱하여 식을 정리하면 $3^\pi>\pi^3$ 을 얻을 수 있다.

(4) (2)의 그래프로부터 $x=\dfrac{3}{\ln a}$ 에서 극대이자 최댓값을 가지므로 그 최댓값을 M이라 하면 $x>0$에서 $0<x^3a^{-x}\le M$ 이 성립한다. 양변을 x로 나누면 $0<x^2a^{-x}\le\dfrac{M}{x}$ 이고 양변에 극한을 취하면 $0<\lim\limits_{x\to\infty}x^2a^{-x}\le\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{M}{x}=0$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2a^{-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{a^x}=0$ 이다.

[문제 2]

(1) 선분의 긴 부분과 짧은 부분의 길이를 각각 a, b 라 하면 조건으로부터 $a:b=a+b:a$ 의 비가 성립한다. 그러면 $a^2=ab+b^2$ 으로부터 양변을 b^2으로 나누어 식을 정리하여 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-\dfrac{a}{b}-1=0$ 을 얻을 수 있다. 따라서 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\because \dfrac{a}{b}>0\right)$ 이므로 구하는 황금비는 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 이다.

한편, (가)에서 수열 $\{a_n\}$ 에 대해 $\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha$ 라 하고 주어진 관계식 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 의 양변을 a_{n+1} 로 나누어 정리하면 $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}}$ 이 성립한다. 수렴조건에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\alpha$ 이므

로 양변에 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}}\right)$$

로부터 $\alpha=1+\frac{1}{\alpha}$, 즉 $\alpha^2-\alpha-1=0$ 으로부터 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because \alpha>0)$ 이 되므로 위에서 구한 황금비의 값과 일치함을 알 수 있다.

(2) $\frac{c_1}{c_2}=m$ (m은 정수)라고 하자

주어진 관계식으로부터

$$\begin{aligned}
c_3&=c_2+c_1=(1+m)c_2\\
c_4&=c_3+c_2=(2+m)c_2\\
c_5&=c_4+c_3=(3+2m)c_2\\
c_6&=c_5+c_4=(5+3m)c_2\\
c_7&=c_6+c_5=(8+5m)c_2\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$c_{n+2}=(a_{n+1}+a_n m)c_2$ 이 성립한다. (단, $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$)

$k>4$ 에서 $c_k=0$ 일 때가 존재해야 하므로 $n>2$일 때 $c_{n+2}=0$ 이 되어야 하고 $c_2\neq 0$ 이므로 $a_{n+1}+a_n m=0$, 즉 $m=-\frac{a_{n+1}}{a_n}$이다. 이 때 수열 $\{a_n\}$의 이웃한 임의의 두 항은 서로소이다. 왜냐하면 수열 $\{a_n\}$의 어떤 이웃한 두 항 (a_k, a_{k+1})이 서로소가 아니라면 1이 아닌 최대공약수 d를 가지게 되고 $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$에 의해 (a_{k-1}, a_k)도 최대공약수 d를 가진다. 마찬가지로 (a_{k-2}, a_{k-1}), $\cdots$,(a_2, a_3), (a_1, a_2) 도 1이 아닌 최대공약수 d를 가지는데 $a_1=a_2=1$ 이므로 이는 모순이다. 따라서 수열 $\{a_n\}$의 이웃한 모든 두 항은 서로소이다. 이 때 $n>2$ 이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$은 정수가 아니다. 즉 m은 정수가 될 수 없으므로 모순이다. 따라서 $\frac{c_1}{c_2}$은 정수가 아니다.

[문제 3]

(1) 임의의 자연수 k에 대해 $k<x<k+1$ 인 x에 대해 $\frac{1}{k+1}<\frac{1}{x}<\frac{1}{k}$ 이므로 (가)에 의해

$$\frac{1}{k+1}<\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$$

이 성립한다. 먼저 $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ 에 대해 $k=1,2,3,\ \cdots,n$ 을 차례로 대입하여 더하면

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ \cdots\ +\frac{1}{n}$$

으로부터

$$\ln(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

이 성립한다. 이번에는 $\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ 에 대해 $k=1,2,3,\cdots,n-1$ 을 차례로 대입하여 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x}dx = \ln n$$

가 성립하고 양변에 1을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \ln n+1$$

이 성립한다.

(2) (1)의 결과로부터 $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} < \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n} < 1+\frac{1}{\ln n}$ 이 성립하고

2이상의 자연수 n에 대해 $1 < \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$이고, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$$

이 성립한다.

(3) $\int \sin^n x dx = \int \sin x \cdot \sin^{n-1}x dx$에서 $f(x)=\sin^{n-1}x$,

$g'(x)=\sin x$라 놓고 부분적분법을 사용하면

$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1}x\cdot\sin x dx = \sin^{n-1}x\cdot(-\cos x)$

$-\int (n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x dx$ 이고 $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$이므로

$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1}x\cos x - (n-1)(\int \sin^{n-2}x dx - \int \sin^n x dx)$

$\therefore \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$

$a_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n}x dx$라 두면 $a_0 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, $a_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x dx = 1$

$a_{2n} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n}x dx = \left[-\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}x\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2n-1}{2n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2n-2}x dx$

$= \frac{2n-1}{2n}\cdot a_{2n-2}$을 얻을 수 있고, 이 과정을 계속하면

$a_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\cdot a_{2n-4} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot a_0$

$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{\pi}{2}$ 가 된다.

(4) (3)과 같은 방법으로 하면

$a_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} a_{2n-1} = \cdots = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3} a_1$이므로

$a_{2n+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)}$, $a_{2n-1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n-2)}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n-1)}$ 이다.

$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로 $\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$

$\therefore \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n+1} x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n} x dx \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{2n-1} x dx$가 성립하므로

$a_{2n+1} \le a_{2n} \le a_{2n-1}$로부터 $1 \le \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \le \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$ 이 성립한다.

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} = 1$이다.